I.E.S. “Gonzalo Nazareno” **Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales I**

EXAMEN DE DERIVADAS **Marzo 2008**

1°/ Calcula las derivadas de las siguientes funciones:

a) $f(x) = \frac{1 - x^2}{1 + x}$

b) $f(x) = 3x \cdot \ln 2x$

2°/ Sean las funciones f(x)= $\ln x$, g(x)=$\sqrt{x}$, h(x)=$\frac{1}{x}$**, halla:**

a) $(g \circ f)'(x)$

b) $(h \circ g)'(x)$

3°/ Estudio analítico de las funciones: $f(x) = 2^x$ **y de** $g(x) = \log_2 x$

4°/ Haz la derivada por la definición de la función: $f(x) = ax^3$

SOLUCIONES

1º/ Calcula las derivadas de las siguientes funciones:

a) $f(x)=\frac{1-x^2}{1+x}$

Aplicamos la regla de la derivación del cociente y obtenemos la expresión:

$$f'(x)=\frac{-2x(1+x)-(1-x^2)}{(1+x)^2}$$

A continuación simplificamos la expresión anterior:

$$f'(x)=\frac{-2x-x^2-1+x^2}{x^2+2x+1}=\frac{-2x-1}{x^2+2x+1}$$

b) $f(x)=3x\cdot\ln 2x$

Aplicamos la regla de la derivación del producto y obtenemos la expresión:

$$f'(x)=3\ln 2x+3x\left(\frac{1}{2x}\cdot 2\right)$$

A continuación simplificamos la expresión anterior:

$$f'(x)=3\ln 2x+3$$

2º/ Sean f(x)= $\ln x$, g(x)=$\sqrt{x}$, h(x)=$\frac{1}{x}$, halla:

a) $(g\circ f)'(x)$

En primer lugar debemos componer las funciones f(x)= $\ln x$ y g(x)=$\sqrt{x}$ en ese sentido:

$x\to f(x)\to \ln x\to g(f(x))\to g(\ln x)\to\sqrt{\ln x}$ De modo que, $g(f(x))=\sqrt{\ln x}$

Pasamos ahora a derivar esta función compuesta por la regla de la cadena:

$$(g(f(x)))'=\frac{1}{2}(\ln x)^{-\frac{1}{2}}\cdot\frac{1}{x}$$

Simplificamos la expresión resultante: $(g(f(x)))'=\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{\ln x}}\cdot\frac{1}{x}=\frac{1}{2x\sqrt{\ln x}}$

b) $(h\circ g)'(x)$

Procedemos de manera análoga al apartado anterior.

En primer lugar debemos componer las funciones g(x)=$\sqrt{x}$, h(x)=$\frac{1}{x}$ en ese sentido:

$x\to g(x)\to\sqrt{x}\to h(g(x))\to h(\sqrt{x})\to\frac{1}{\sqrt{x}}$ De modo que, $h(g(x))=\frac{1}{\sqrt{x}}$

Pasamos ahora a derivar esta función compuesta por la regla de la cadena:

$$h(g(x))' = -\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}-1}$$

Simplificamos la expresión resultante

$$h(g(x))' = -\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}-1} = -\frac{1}{\sqrt{x^3}}$$

3°/ Estudio analítico de las funciones: $f(x) = 2^x$ y $g(x) = \log_2 x$

$f(x) = 2^x$

1- **Dominio**: $\Re$
2- **Rango:** $(0,+\infty)$
3.- **Simetría:** No presenta ningún tipo de simetría (ni par ni impar)
4.- **Monotonía:** Estrictamente creciente. Basta tomar dos elementos del dominio y comprobar que sus imágenes conservan el orden de crecimiento.
$3 < 4 \Rightarrow 2^3 < 2^4$. Además su derivada es estrictamente positiva
$f'(x) = 2^x \ln 2$.
5.- **Puntos de cortes con los ejes:** No corta al eje OX puesto que $2^x \neq 0$ para cualquier valor de la variable independiente.
Corta al eje OY en el $(0,1)$.
6.- **Continuidad:** La función es continua en todo su dominio
Gráfica

$g(x) = \log_2 x$

Es la función recíproca a la anterior, por lo tanto su análisis sería:
1- **Dominio**: $(0,+\infty)$
2- **Rango:** $\Re$
3.- **Simetría:** No presenta ningún tipo de simetría (ni par ni impar)
4.- **Monotonía:** Estrictamente creciente. Basta tomar dos elementos del dominio y comprobar que sus imágenes conservan el orden de crecimiento.
$4 < 8 \Rightarrow \log_2 4 < \log_2 8 \quad (2 < 3)$. Además su derivada es estrictamente positiva.
5.- **Puntos de cortes con los ejes:** No corta al eje OY puesto que el x=0 no entra en el dominio. Corta al eje OX en el $(1,0)$.
6.- **Continuidad:** La función es continua en todo su dominio
Gráfica

4°/ Haz la derivada por la definición de la función: $f(x) = ax^3$

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{a(x+h)^3 - ax^3}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{3ax^2h}{h} = 3ax^2$$